数理解析研究所講究録
617巻 1987年 193-205

Non congruence subgroup のHecke作用素

東大理 寺杣友秀.
(Tomohide Terasoma)

§1 Reimann面の分岐の様子.

Eを. E: $y^2=x(x-1)(x-p)$ （pはodd, $\in \mathbb{N}$, $p \geqq 5$）
で定義されるelliptic curveとする。

<u>Lemma 1</u> Eは$\mathbb{P}^1$上の$\{0,1,\infty\}$以外で不分岐なcoveringとして表わされる。

<u>Proof</u> これはBelyiによってさらに一般化された形で知られているが. ここではその具体的な形の1つをもとめてみよう。$E \to \mathbb{P}^1$を(x,y)をxに送るmorphismと考えると. これは. $X \supset \{0,1,\infty,p\}$以外で不分岐なcoveringであるから. $f: X=\mathbb{P}^1 \longrightarrow Y=\mathbb{P}^1$ なるmapで. $f^{-1}(\{0,1,\infty\}) \supset \{0,1,\infty,p\}$であり. fは.$\{0,1,\infty\} \subset Y$以外で不分岐なるものを構成すればよい。それには

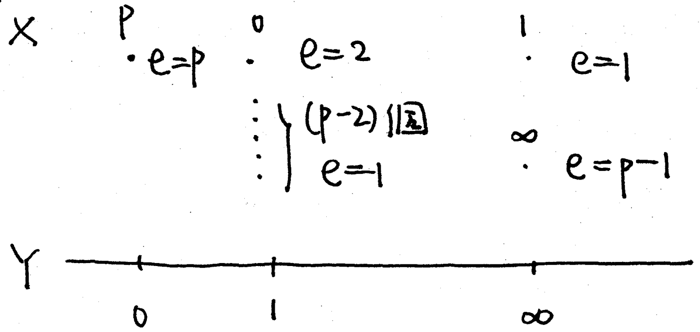
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}, \quad f(x)=\frac{1}{p^p}(x-1)^{-1}(x-p)^p$$

とすれば十分である。これから合わせて. $E \longrightarrow X \longrightarrow Y$ によってもとめるcoveringを得る。 Q.E.D.

さて次にE/YのGalois closureを求める。ℓを$Y^\circ=Y-\{0,1,\infty\}$の点とすると、$E_\ell:=\ell$におけるEのfiberには、$\pi_1(Y^\circ,\ell)$が作用する。それを、$\pi_1(Y^\circ,\ell)\longrightarrow \mathrm{Aut}(E_\ell)$として、このKernelに対応する$Y$のcoveringが求めるGalois closureである。$X_\ell:=\ell$におけるXのfiberとする。この時、$\# X_\ell=p$である。

<u>Lemma 2</u>　$\pi_1(Y^\circ,\ell)\longrightarrow \mathrm{Aut}(X_\ell)$は全射である。すなわち$X/Y$のGalois closureの$Y$上のGalois群は、$p$次対称群$\mathfrak{S}_p$である。

<u>Proof</u>　分岐点の様子は下の図の様になる。



ここでeは、そこでの分岐指数を表わす。これから上のmapの像は、$\mathbb{Z}/p$, $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/(p-1)$を含む。対称群の性質より、これは、必ず$\mathfrak{S}_p$を生成する。　　Q.E.D.

さて次にいくつかの群を定義する。

$$H_2 = \{ f \in \mathrm{Aut}(\{-p,\dots,-1,1,\dots,p\}) \mid f(-x) = -f(x)\ (\forall x \in \{-p,\dots,p\}) \}$$

$$H_1 = \{ f \in H_2 \mid f(1) = 1 \}$$

また $H_2 \xrightarrow{p} \mathfrak{S}_p = \mathrm{Aut}(\{1,\dots,p\})$ を $f \longmapsto f$ (modulo sign)

で定義し、その Kernel を V とおく。この時

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow H_2 \xrightarrow{p} \mathfrak{S}_p \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

となる。さて E の Y 上の Galois closure を M, X の Y 上の Galois closure を L と書く。この時 Reimann 面の covering の関係は、図の様になる。

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d] & L\cdot E \arrow[l] \arrow[d] & M \arrow[l] \\
X \arrow[d] & E \arrow[l] & \\
Y. & &
\end{tikzcd}$$

<u>Theorem 3</u>　上の図に対して、群の包含関係は下の図の様になる。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d] & H_1 \cap V \arrow[l] \arrow[d] & 1 \arrow[l] \\
p^{-1}(\mathfrak{S}_{p-1}) \arrow[d] & H_1 \arrow[l] & \\
H_2. & &
\end{tikzcd}$$

<u>Proof</u> 証明は難しくないが、省略する。

§2 群論的解釈.

$Y-\{0,1,\infty\}\cong \mathfrak{h}/\Gamma(2)$ である。ここで、上半空間 $\mathfrak{h}=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$ に $\Gamma(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\,\middle|\,\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\equiv 1 \pmod 2\right\}$ は、1次分数変換で作用するものとする。$\Gamma(2)/\pm1$ は、$\mathfrak{h}$ に fixed-point free に作用するので、$\pi_1(Y-\{0,1,\infty\},b)\cong\Gamma(2)/\pm1$ である。$Y\cong\mathfrak{h}/\Gamma(2)$ を、$Y\ni 0$ と 0-cusp, $Y\ni\infty$ と $i\infty$ cusp, が対応する様にとれば、$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ の $\mathrm{Aut}(X_{b})$ における image が、$(2,\cdots,p)$ と conjugate, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ の image が $(1,\cdots,p)$ と conjugate となる。他方、$AB^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&1\end{pmatrix}\in\{1\text{-cusp の stabilizer}\}$ なので AB^{-1} は $(1,2)$ と conjugate であるとしてよい。以上の事から適当な番号のつけかえ(X_b の)によって

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(Y-\{0,1,\infty\}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(X_b)\\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong\\ \Gamma(2)/\pm1 & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathfrak{S}_p\end{array}$$

$$\alpha=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\longmapsto(2,\cdots,p)^{-1}$$

$$\beta=AB^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&1\end{pmatrix}\longmapsto(1,2)$$

$$\gamma=B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\longmapsto(1,\cdots,p)$$

なる様に対応しているとしてよい。

Proposition 1 適当に. $E_\ell=\{\pm 1,\cdots,\pm p\}$ と同一視すれば.

i) $E_\ell \ni \pm i \longmapsto i \in X_\ell$ となり.

ii) $\pi_1(Y-\{0,1,\infty\}) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathrm{Aut}(E_\ell)$ が.

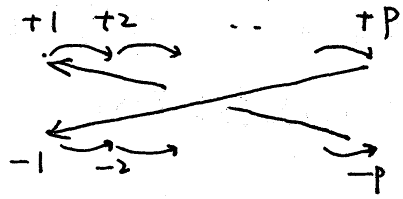
$$\alpha^{-1} \longmapsto (2,\cdots,p)^\sim$$

$$\beta \longmapsto (1,2)^\sim$$

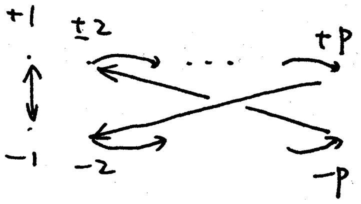
$$\gamma \longmapsto (1,\cdots,p)^\sim$$

なる map で与えるとしてよい。ここで. $(1,\cdots,p)^\sim, (1,2)^\sim,$ $(1,\cdots,p)^\sim$ は.

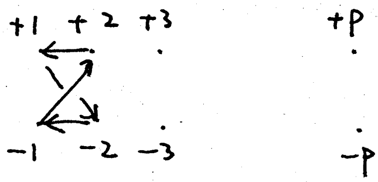
$(1,\cdots,p)^\sim$:



$(2,\cdots,p)^\sim$



$(1.2)^\sim$



なる置換である。

Proof まず $(1,\cdots,p)^\sim$ は E_ℓ に作用する。これは. X_ℓ でみると. $(1,\cdots,p)$ であり. また. $\{\pm 1,\cdots,\pm p\}$ に transitive に作用

する。$(2,\cdots,p)^\sim$ は X_ℓ で見ると．$(1,\cdots,p)$ で．$\{\pm 2,\cdots,\pm p\}$ にtransitiveに作用する。また．$(1,\cdots,p)^\sim(2,\cdots,p)^{\sim -1}$ は．$\{\pm 1,\pm 2\}$ にtransitiveに作用し．$\{\pm 3,\cdots,\pm p\}$ にtrivialに作用するので，これらの事を考え合わせて．図の様な置換をひきおこして ゐるを得ない。 Q.E.D.

§2. 前§の記号での $\pi_1(Y-\{0,1,\infty\})\cong\Gamma(2)/\pm 1\twoheadrightarrow H_2$ なるmap 及び ℓ を奇素数とした時の自然なmap $\Gamma(2)/\pm 1\twoheadrightarrow \mathbb{P}SL(2,\mathbb{F}_\ell)$ を合わせ． $f:\pi_1(Y-\{0,1,\infty\})\to H_2\times\mathbb{P}SL(2,\mathbb{F}_\ell)$ なるmapを得る。以後pは5以上の自然数とする。

<u>Proposition 2</u> $\ell>p$, $(\ell,p-1)=1$ のもとで．fは全射である。

<u>Proof</u> 各factorへは surjective へ行くので．$\mathrm{Im}f\cap H_2\times\{e\}=H_2\times\{e\}$ を言えば十分である。まず $\mathrm{Im}f\cap H_2\times\{e\}\xrightarrow{\pi}\mathfrak{S}_n$ が全射であることを言おう。今．$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ はπによって．$(2,\cdots,p)$ へ行くので． $A^\ell=\begin{pmatrix}1&2\ell\\0&1\end{pmatrix}$ は．$(2,\cdots,p)^\ell$ へ行く これは．order $(p-1)$ の元である。$B=\begin{pmatrix}1&0\\ &1\end{pmatrix}$ はπによって．$(1,\cdots,p)$ へ行くので．B^ℓ のπによるimageのorderは．pである。また．$(AB^{-1})^\ell\equiv 1\ (\ell)$ であり．πによるimageは．order 2

であるので．$\mathrm{Im} f \cap H_2\times\{e\} \longrightarrow \mathfrak{S}_p$ の image は．order $p, p-1, 2$ の元を含み全射となる。また．$A^{(p-1)\ell}, B^{p\ell}$ の imag は．± 1 のみを交換し．他は fix するので．$\mathrm{Im} f \cap H_2\times\{e\} = H_2\times\{e\}$ を得る。

Q.E.D.

さて以下 $\Gamma(2)/\pm 1$ を略して $\tilde{\Gamma}(2)$ と書く。今 $\tilde{\Gamma}(2) \xrightarrow{\varphi} H_2$ とおき，$\varphi^{-1}(H_1) = G$ とおく。Main theorem は次の Theorem である。

<u>Theorem 3</u>　ℓ を奇素数で $\ell > p$，$\ell \equiv 1\ (p)$，$\ell \not\equiv 1\ (p-1)$，$(\ell, p-1) = 1$ とする。この時．

$$\#\left(G \Big/ \begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G \begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cap G\right) = 2p(\ell+1)$$

である。

<u>Remark</u>　G がもし congruence subgroup なら．ほとんどすべての ℓ について $\#\left(G/\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G \begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cap G\right) = \ell+1$ なので．G は．congruence subgroup でない事がわかる。

<u>Proof</u>　$\#\left(G \Big/ \begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cap G\right) = \ell+1$ と．

$$\#\left(\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tilde{\Gamma}(2) \begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cap G \Big/ \begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} G \begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cap G\right) = 2p$$

を示せばよい。自然な map

$$G/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}\tilde{\Gamma}(2)\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap G \hookrightarrow \tilde{\Gamma}(2)/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}\tilde{\Gamma}(2)\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap \tilde{\Gamma}(2)$$

が全射となる事は. Proposition の全射性の結論である。ゆえにあとは. 次の Propositionを示す事に帰着される。

<u>Proposition 4</u> 記号. 仮定は定理のものとする。自然な map

$$\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}\tilde{\Gamma}(2)\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap G/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap G$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}\tilde{\Gamma}(2)\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cong H_2/H_1$$

は全射である。

<u>Proof</u> の概略. ψを. $\psi(A^\ell)=A$, $\psi(B)=B^\ell$ (ここで. $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$)として定義する。 $\tilde{\Gamma}(2)\xrightarrow{\bar{\varphi}}H_2/H_1\cong\{\pm1,\cdots\pm p\}$とした時. 任意の $j\in\{\pm1,\cdots\pm p\}$ について次の様な性質を満たす word $F(A,B)$ が存在すればよい。

$$\begin{cases}\bar{\varphi}(F(A^\ell,B))=1\\ \bar{\varphi}(\psi(F(A,B^\ell))=j\end{cases}$$

この様なFを実際に構成することにより. このProofを得る。この部分については. 組み合わせ論的な考察を必要とし. 一連の結果の本質的な部分であるが. かなり長い考察を必要とするので. 証明を省きます。くわしくは. あとに出る論文を見て下さい。 Q.E.D.

§3 Correspondence に関する結果.

ここで下の correspondence を考える。(ℓ を素数とする。)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{H}/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap G \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathfrak{H}/G & & \mathfrak{H}/G. \end{tikzcd}$$

§2 の main theorem より. $\ell>p$, $\ell\equiv 1\ (p)$, $\ell\not\equiv 1\ (p-1)$, $(\ell, p-1)=1$ の時 $\deg p=\deg q=2p(\ell+1)$ であることがわかっていた。今 $\mathfrak{H}/G$ の compact化 $(\mathfrak{H}/G)^*$ は $E: y^2=x(x-1)(x-p)$ と同型であるから. この correspondence q_*p^* は. $H^1(E, \mathbb{Q})$ の自己準同型をひきおこす。これを $T(\ell)$ と書く。今. 自然な map $\mathfrak{H}/G\to\mathfrak{H}/\Gamma(2)$ から induce される map を τ. とする。$\mathfrak{H}/\Gamma(2)$ 上には上と同様

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{H}/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}\Gamma(2)\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap \Gamma(2) \arrow[dl, "\bar{p}"'] \arrow[dr, "\bar{q}"] & \\ \mathfrak{H}/\Gamma(2) & & \mathfrak{H}/\Gamma(2) \end{tikzcd}$$

なる map を得るが. このグラフを考える。

$$\Gamma_{\bar{p},\bar{q}}=\mathfrak{H}/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}\Gamma(2)\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap\Gamma(2)\xrightarrow{(\bar{p},\bar{q})}\mathfrak{H}/\Gamma(2)\times\mathfrak{H}/\Gamma(2)$$

さらに (p,q) のグラフを $\Gamma_{p,q}$ とする。

$$\Gamma_{p,q}=\mathfrak{H}/\begin{pmatrix}\ell&0\\0&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\cap G\xrightarrow{(p,q)}\mathfrak{H}/G\times\mathfrak{H}/G.$$

<u>Proposition 1</u>. 下の commutative diagram は fiber product である。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{p,q}^* & \longrightarrow & (\mathfrak{h}/G)^* \times (\mathfrak{h}/G)^* \cong E\times E \\ \downarrow & & \downarrow \tau\times\tau \\ \Gamma_{\bar p,\bar q}^* & \longrightarrow & (\mathfrak{h}/\Gamma(2))^*\times(\mathfrak{h}/\Gamma(2))^* \end{array}$$

<u>Proof</u> 上は commutative なので、下の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{p,q}^* \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drrr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& \Gamma_{\bar p,\bar q}^* \times_{(\mathfrak{h}/\Gamma(2))^{*2}} (E\times E) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & E\times E \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\tau\times\tau"] & E \arrow[d, "\tau"] \\
& \Gamma_{\bar p,\bar q} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\bar p"'] & (\mathfrak{h}/\Gamma(2))^*\times(\mathfrak{h}/\Gamma(2))^* \arrow[r] & (\mathfrak{h}/\Gamma(2))^*
\end{tikzcd}$$

まず $\deg\tau = 2p$ なので、$\deg\alpha = \deg(\tau\times\tau) = (2p)^2$.
$\Gamma_{p,q}^* \to E\times E$ は injective なので β も injective. また
$\Gamma_{p,q}^*$, $\Gamma_{\bar p,\bar q}^*$ 共に既約で、$\tau\circ p$ が finite なので $\alpha\circ\beta$ も finite。
さらに上の可換図式から、$\deg(\beta\circ\alpha)\cdot\deg\bar p = \deg p\cdot\deg\tau$.
ここで $\deg\bar p = \ell+1$ は良く知られている。$\deg p = 2p(\ell+1)$, $\deg\tau = 2p$ を代入して、$\deg(\beta\circ\alpha) = (2p)^2 = \deg\alpha$. ゆえに β は surjective.

<u>Corollary 2</u>　ℓ. p を今までの通りとする。この時.
$T(\ell) \mid H^1(E, \mathbb{Q}) = 0$ となる。

<u>Proof</u>　前のでは.
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E/\pm 1 \;\; \mathbb{P}^1 \\ & \tau \searrow & \mathfrak{H}/\Gamma(2) \end{array}$$
とfactorするので. $\Gamma_{p,q}^* \cong \Gamma_{p,-q}^*$ となる。ここで $-q = ((-1)倍\mathrm{map})\circ q$ である。また correspondence として H^1 上に (-1)倍 map は -1 として作用するので $q_* p^* = -((-q)_* p^*)$. これから. 上の等式を得る。　　　　Q.E.D.

<u>Corollary 3.</u>　$\Gamma_{p,q}^* \pmod{\ell}$ は次の様になる。

$$\Gamma_{p,q}^* \pmod{\ell} = H + {}^tH$$
$$H = F + (-F) + C.$$

ここでFは $E \pmod{\ell}$ の Frobenius の graph. Cはほとんどすべての ℓ について既約な divisor で (-1)倍で stable。

<u>Proof</u>　$\Gamma_{p,q}^* \pmod{\ell} = (\tau\times\tau \pmod{\ell})^{-1}(F) + (\tau\times\tau \pmod{\ell})^{-1}({}^tF)$
で. $(\tau\times\tau \pmod{\ell})^{-1}(F) = H$ とおくと.

$$H = \{(x,y) \in (E\times E) \pmod{\ell} \mid \tau(x)^\ell = \tau(y)\}$$
$$= \{(x,y) \mid \tau(x^\ell) = \tau(y)\}$$

さらに $H' = \{(x,u)\in (E\times E)(\mathrm{mod}\,\ell) \mid \tau(x)=\tau(u)\}$

とおけば、$H'\ni(x,u)\longmapsto (x,u^{\ell})\in H$ がdefineされる。

$$\begin{tikzcd} H' \arrow[r] \arrow[dr] & H \arrow[d] \\ & (\mathfrak{H}/\Gamma(2)^*)(\mathrm{mod}\,\ell) \end{tikzcd}$$

$$\deg pr_1|_H = (\deg pr_1|_F)\times(2p)^2 = (2p)^2$$

$$\deg pr_2|_H = \ell(2p)^2$$

$\deg pr_1|_{H'} = (2p)^2$, $\deg pr_2|_{H'} = \ell(2p)^2$. だから、$H' \hookrightarrow H$ であれば、$H'\cong H$ となる。

$$\begin{tikzcd} H' \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"'] & H \arrow[d] \\ E & E\times E \arrow[l, "pr_1"] \end{tikzcd}$$

しかし左の図で α は separable, β は purely inseparableなので、β は injectiveでなくてはいけない。

他方、$H' = (\mathfrak{H}/G)^* \times_{(\mathfrak{H}/\Gamma)^*} (\mathfrak{H}/G)^* \ \mathrm{mod}\,\ell$ である。一般に次のLemmaが知られている。

<u>Lemma 4</u> Γ_1 と $\Gamma_2 \subset \Gamma \equiv SL(2,\mathbb{Z})$ の finite index の subgroupとすると、$(\mathfrak{H}/\Gamma_1)^* \times_{(\mathfrak{H}/\Gamma)^*} (\mathfrak{H}/\Gamma_2)^*$ の normalization $\cong \coprod_{\Gamma_1\backslash\Gamma/\Gamma_2\ni\bar{g}} (\mathfrak{H}/\Gamma_1\cap g\Gamma_2 g^{-1})^*$ となる。

<u>proof</u> 略.

今この Lemma を使うと

$$(h_y/G)^* \times_{(h_y/\Gamma(2))^*} (h_y/G)^* \text{ の normalization}$$

$$\cong \coprod_{G\backslash\Gamma(2)/G} (h_y/G \cap gGg^{-1})^*$$

$$\cong \coprod_{H_1\backslash H_2/H_1} (h_y/G \cap gGg^{-1})^*$$

で、$H_1\backslash\{\pm i \mid i=1,\cdots,p\} = \{+1\}\cup\{-1\}\cup\{\pm 2,\cdots,\pm p\}$

となり、これは l に independent であるから、ほとんどすべての l について既約成分は3つである。F と $-F$ は明らかにその異なる成分であるから、残りの1つは、ほとんどすべての l について既約である。

Q.E.D.